SCRAMBLING INDEX DARI GRAF JARING LABA-LABA

SCRAMBLING INDEX OF SPIDER WEB

Nurul Maulida Surbakti[1], Dian Septiana[2]
[1,2]Program Studi Matematika, Universitas Negeri Medan
e-mail: [1]nurulmaulida@unimed.ac.id, [2]dianseptiana@unimed.ac.id

ABSTRAK

Scrambling index graf primitif G, yang dinotasikan dengan $k(G)$, adalah bilangan bulat positif k terkecil sehingga untuk setiap pasangan simpul u dan v yang berbeda terdapat simpul w dengan sifat ada jalan yang menghubungkan simpul u dan w dan jalan yang menghubungkan simpul v dan w dengan panjang k. Pada penelitian ini akan didiskusikan mengenai scrambling index dari graf primitif G terdiri atas s buah lingkaran dengan panjang genap $n \geq 3$ dan k buah busur yang menghubungkan masing-masing simpul pada s buah lingkaran dengan satu buah busur di dalam lingkaran. Untuk tiap graf primitif G, akan diperoleh bentuk umum scrambling index yang bergantung pada s dan k.

Kata kunci: graf primitif; spider web; scrambling index

ABSTRACT

Scrambling index of primitive graph G, denoted by K(G), is the smallest integer k such that for every pair of vertices u and v of G there exist vertex w such that there exist walks of length k that are connecting vertices u and w of G and vertices v and w of G. In this research, we discuss the scrambling index of primitive graph G consisting of s cycles where each cycle has even length $n \geq 3$ and k arcs that connect each vertex in s cycless with one vertex in the cycle. For each pair of primitive graph G, we find a formula for scrambling index that depends on s and k.

Keywords: *primitive graph;, spider web; scrambling index*

1. PENDAHULUAN

Graf merupakan sebuah objek kombinatorial yang dapat dikaji dari sudut counting, aljabar maupun optimisasi. Sebuah graf biasanya digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut. Untuk keperluan yang sifatnya aplikatif sebuah graf direpresentasikan secara grafis, yaitu setiap simpul yang berada di himpunan V direpresentasikan menggunakan simpul (*vertex*) dan setiap busur (*edge*) yang berada di himpunan E direpresentasikan sebagai sebuah garis yang merupakan pasangan tak berurut dari simpul-simpul di himpunan V.

Andaikan G adalah sebuah graf. Sebuah jalan (*walk*) yang menghubungkan dua simpul u dan v adalah sebuah barisan t buah busur dalam bentuk

$$\{u = u_0, u_1\}, \{u_1, u_2\}, \{u_2, u_3\} \cdots, \{u_{t-1}, u_t = v\}$$

Sebuah graf G dikatakan terhubung jika untuk setiap pasangan simpul u dan v yang berbeda di G terdapat jalan yang menghubungkan kedua simpul tersebut. Graf terhubung G adalah primitif jika dan hanya jika terdapat sebuah bilangan bulat positif k sehingga untuk setiap pasangan simpul u dan v di G terdapat jalan W_{uv} dengan $\ell(W_{uv})$. Sebuah graf G dikatakan primitif jika dan hanya jika graf G memuat paling sedikit satu lingkaran dengan panjang ganjil.

Scrambling index dari graf primitif G dinotasikan dengan $k(G)$ adalah bilangan bulat positif terkecil k sehingga untuk setiap pasangan simpul yang berbeda u dan v, terdapat sebuah simpul w sehingga terdapat jalan dari simpul u ke simpul w dan simpul v ke simpul w dengan panjang k [1][2].

Untuk setiap $u, v \in V(G)$ dan $u \neq v$, scrambling index lokal dari titik u dan v di G didefinisikan sebagai berikut:

$$k_{u,v}(G) = \min_{w \in V(G)} \{k: terdapat\ W_{uw}\ dan\ W_{vw}\ dengan\ panjang\ k\}.$$

Jika scrambling index lokal dari simpul u dan v di G adalah $k_{u,v}(G)$, maka untuk setiap $k' \geq k_{u,v}(G)$, terdapat simpul w' sehingga terdapat $W_{uw'}$ dan $W_{vw'}$ dengan panjang k Sehingga scrambling index dari graf G didefinisikan sebagai berikut:

$$k(G) = \max \{ k_{u,v}(G) \mid u, v \in V(G), u \neq v\}.$$

Proposisi 1. Andaikan G adalah sebuah graf dan k' adalah bilangan bulat genap positif. Jika untuk tiap pasangan simpul yang berbeda u dan v di G, terdapat sebuah jalan dengan panjang genap $W_{uv} \leq k'$, maka $k(G) \leq \frac{k'}{2}$.

Pada penelitian sebelumnya [3][4][5] membahas scrambling index dari berbagai jenis graf primitif. Pada penelitian ini akan secara khusus membahas scrambling index dari kelas graf primitif jaring laba-laba yang terdiri dari s buah lingkaran dengan panjang $n \geq 3$ dan k buah busur yang menghubungkan masing-masing simpul pada s buah lingkaran dengan satu buah simpul di dalam lingkaran.

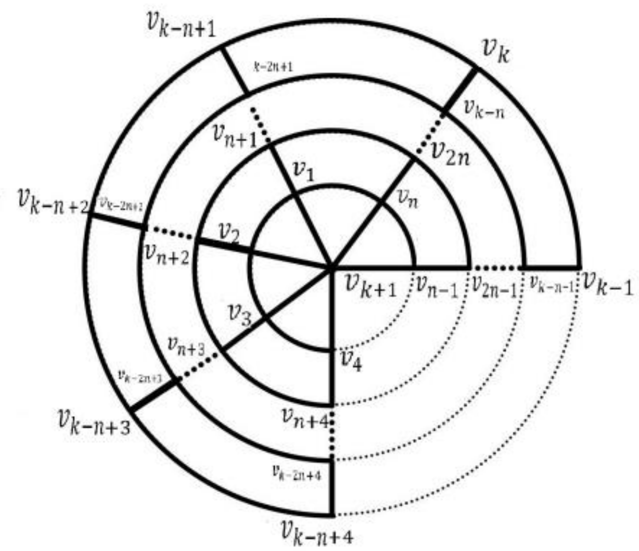
2. METODE PENELITIAN

Berikut merupakan langkah-langkah untuk memperoleh scrambling index dari graf jaring laba-laba yaitu sebuah graf yang terdiri dari s buah lingkaran dengan panjang genap $n \geq 3$ dan k buah busur yang menghubungkan masing-masing simpul pada s buah lingkaran dengan satu buah simpul di dalam lingkaran. Adapun langkah-langkahnya sebagai berikut:

1. Menentukan nilai scrambling index.
   Sebuah graf G dapat direpresentasikan menjadi sebuah matriks ketetanggaan simetris A berukuran $n \times n$. Untuk menentukan nilai scrambling index dari graf G dapat dilakukan dengan menggunakan program yang dibuat di MAT LAB.
2. Menentukan bentuk umum scrambling index.
   Setelah memperoleh nilai-nilai scrambling index untuk graf G yang telah didapat dari program yang dibuat di MAT LAB, kita dapat menentukan persamaan untuk nilai scrambling index yang bergantung pada s dan k.
3. Membuktikan bentuk umum scrambling index.
   Langkah selanjutnya adalah membuktikan bentuk umum scrambling index untuk graf G dengan cara menentukan batas atas dan batas bawah dari graf G. Batas bawah diperoleh dengan menentukan scrambling index lokal dari dua simpul yang berbeda di G terhadap sebuah simpul di G sehingga memenuhi $k(G) \geq f(k,s)$. Sedangkan batas atas diperoleh dengan menentukan scrambling index lokal dari setiap dua titik di G sehingga memenuhi $k(G) \leq f(k,s)$.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Andaikan terdapat s *lingkaran* yang saling lepas dengan panjang tiap lingkaran adalah $n \geq 3$ dan k buah busur yang menghubungkan masing-masing simpul pada s buah lingkaran dengan satu buah simpul di dalam lingkaran seperti yang ditunjukkan pada Gambar 1.



Gambar 1 Graf (k, s)-Jaring laba-laba

Teorema 1. Andaikan $n = \frac{k}{s}$ adalah bilangan bulat positif genap dan G adalah graf (k, s)-Jaring laba-laba, maka $k(G) = s$.

Bukti. Kedua titik $v_i \in C_{s-1}$ dan $v_j \in C_s$, andaikan terdapat titik v_{k+1} yang menghubungkan $v_i \in C_{s-1}$ dan $v_j \in C_s$ sehingga terdapat sebuah jalan $W_{v_i v_{k+1}}$ dan jalan $W_{v_{k+1} v_j}$ dengan panjang,

$$\begin{aligned} \ell\left(W_{v_i v_j}\right) &= d(v_i, v_{k+1}) + d\left(v_{k+1}, v_j\right) \\ &= s - 1 + (s - 1 + 2) \\ &= s - 1 + s + 1 \\ &= 2s. \end{aligned}$$

Maka dapat diperoleh $k_{v_i, v_j}(G) = \frac{2s}{2} = s$. Oleh definisi scrambling index dimana $k(G)$ merupakan nilai maksimum dari nilai scrambling index untuk tiap dua simpul yang berbeda di G, maka dapat diperoleh $k(G) \geq s$. Selanjutnya akan diperlihatkan bahwa untuk tiap dua simpul yang berbeda v_i dan v_j di G, terdapat jalan $W_{v_i v_j}$ dengan panjang genap dimana $\ell\left(W_{v_i v_j}\right) \leq 2s$. Jika $d(v_i, v_j)$ genap, maka lintasan tersebut dapat diperpanjang menjadi jalan dengan panjang tepat $2s$. Sekarang diasumsikan $d(v_i, v_j)$ ganjil. Terdapat beberapa kasus, yaitu:

1. Kedua simpul $v_i, v_j \in C_r$ dimana $r \leq s$ terdapat simpul v_{k+1} yang menghubungkan $v_i, v_j \in C_r$ sehingga terdapat sebuah jalan $W_{v_i v_{k+1}}$ dan jalan $W_{v_{k+1} v_j}$ dengan panjang $\ell\left(W_{v_i v_j}\right) = d(v_i, v_{k+1}) + d(v_{k+1}, v_j) = r + r = 2r \leq 2s$.

2. Kedua simpul $v_i \in C_r, v_j \in C_{r+m}$ dimana $r < s, m < s$ terdapat simpul v_{k+1} yang menghubungkan $v_i \in C_r, v_j \in C_{r+m}$ sehingga terdapat sebuah jalan $W_{v_i v_{k+1}}$ dan jalan $W_{v_{k+1} v_j}$ dengan panjang $\ell\left(W_{v_i v_j}\right) = d(v_i, v_{k+1}) + d(v_{k+1}, v_j) = r + d(v_{k+1}, v_j) \leq 2s$.
3. Untuk $v_i \in v_{k+1}, v_j \in C_r$ dimana $r \leq s$. Maka lintasan terpendek dengan panjang genap yang menghubungkan kedua titik adalah $\ell\left(W_{v_i v_j}\right) = d(v_i, v_j) + 1 = r + 1 \leq 2s$.

Untuk setiap pasangan simpul v_i dan v_j yang berbeda di G, telah dibuktikan bahwa terdapat jalan $W_{v_i v_j}$ dengan panjang $\ell\left(W_{v_i v_j}\right)$. Oleh proposisi 1, diperoleh $k(G) \leq s$. Jadi, dapat disimpulkan bahwa $k(G) = s$.

4. KESIMPULAN

Penelitian ini membahas mengenai scrambling index dari kelas graf primitif Jaring laba-laba yang terdiri dari s buah lingkaran dengan panjang genap $n \geq 3$ dan k buah busur yang menghubungkan masing-masing simpul pada s buah lingkaran dengan satu buah simpul di dalam lingkaran. Hasil yang diperoleh adalah misalkan $n = \frac{k}{s}$ adalah bilangan bulat positif genap dan G adalah graf (k, s)-Jaring laba-laba, maka $k(G) = s$.

DAFTAR PUSTAKA

[1]. Akelbek, M and Kirkland, S. 2009a. Coefficients of Ergodicity and The Scrambling Index. Linear Algebra and its Applications, Volume 430, Issue 4, 1111-1130.
[2]. Akelbek, M and Kirkland, S. 2009b. Primitive Digraphs with The Largest Scrambling Index. Linear Algebra and its Applications, Volume 430, Issue 4, 1099-
[3]. Mardiningsih and Pasaribu M L 2016 AIP Conf. Proc. 1775 030056.
[4]. Mulyono and Suwilo S 2014 Universal Journal of Applied Mathematics 2 (6) 250-255.
[5]. Mulyono, Sumardi H and Suwilo S 2015 Far East Journal of Mathematical Sciences 96(1) 119-132.